从实数公理到数值分析：核心概念的严格建构

引言

本文档从实数公理出发，严格定义和建立数值分析所需的所有核心数学概念。我们将逐步构建从实数理论到函数分析，再到误差理论的完整概念体系，为后续的数值方法研究奠定坚实的理论基础。

第一章：实数系统的公理化基础

1.1 实数公理体系

实数系统 $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ 是满足以下公理的完备全序域：

域公理

加法公理：

- **A1（结合律）**：$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b) + c = a + (b + c)$
- **A2（交换律）**：$\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a$
- **A3（单位元）**：$\exists 0 \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a$
- **A4（逆元）**：$\forall a \in \mathbb{R}, \exists (-a) \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$

乘法公理：

- **M1（结合律）**：$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- **M2（交换律）**：$\forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a$
- **M3（单位元）**：$\exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0, \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a$
- **M4（逆元）**：$\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1$

分配律：

- **D**：$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

序公理

设 $P \subset \mathbb{R}$ 为正实数集合，满足：

- **O1（封闭性）**：$a, b \in P \Rightarrow a + b \in P \wedge a \cdot b \in P$
- **O2（三分性）**：$\forall a \in \mathbb{R}$，恰好下列之一成立：$a \in P$，$a = 0$，$-a \in P$

由此定义序关系：$a < b \Leftrightarrow b - a \in P$

完备性公理

上确界公理：每个有上界的非空实数子集都有上确界。

1.2 上确界与下确界

定义1.1（界的概念）：设 $S \subset \mathbb{R}$ 为非空集合。

- **上界**：若 $\exists M \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in S: x \leq M$，则称 M 为 S 的上界
- **下界**：若 $\exists m \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in S: x \geq m$，则称 m 为 S 的下界
- **有界**：若 S 既有上界又有下界，则称 S 有界

定义1.2（确界）：设 $S \subset \mathbb{R}$ 为非空有上界集合。

- **上确界**：$\sup S$ 是满足以下条件的实数：
  1. $\sup S$ 是 S 的上界
  2. 若 M 是 S 的任一上界，则 $\sup S \leq M$
- **下确界**：$\inf S$ 是满足以下条件的实数：
  1. $\inf S$ 是 S 的下界
  2. 若 m 是 S 的任一下界，则 $\inf S \geq m$

定理1.1（上确界的等价刻画）：$\alpha = \sup S$ 当且仅当：

1. $\forall x \in S: x \leq \alpha$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in S: x > \alpha - \varepsilon$

1.3 戴德金分割

定义1.3（戴德金分割）：有理数集 $\mathbb{Q}$ 的戴德金分割是有序对 (A, B)，满足：

1. $A, B \subset \mathbb{Q}$，$A \neq \emptyset$，$B \neq \emptyset$
2. $A \cup B = \mathbb{Q}$，$A \cap B = \emptyset$
3. $\forall a \in A, \forall b \in B: a < b$
4. A 没有最大元素

定理1.2（戴德金定理）：每个戴德金分割都唯一确定一个实数。

1.4 实数的完备性等价命题

以下命题等价：

1. **上确界公理**
2. **戴德金分割定理**
3. **区间套定理**
4. **柯西收敛准则**
5. **单调有界定理**
6. **有限覆盖定理**（Heine-Borel）

第二章：序列理论

2.1 序列的定义

定义2.1（数列）：实数列是从自然数集到实数集的函数：

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n$$

记为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 或 $\{a_n\}$。

定义2.2（子列）：设 $\{a_n\}$ 是数列，$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是严格递增的自然数列，则 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 称为 $\{a_n\}$ 的子列。

2.2 序列的收敛性

定义2.3（收敛）：数列 $\{a_n\}$ 收敛到实数 L，记为 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$，当且仅当：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |a_n - L| < \varepsilon$$

定义2.4（发散）：若数列不收敛，则称其发散。

定义2.5（有界数列）：

- 数列 $\{a_n\}$ **有上界**：$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq M$
- 数列 $\{a_n\}$ **有下界**：$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq m$
- 数列 $\{a_n\}$ **有界**：$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$

2.3 柯西序列

定义2.6（柯西序列）：数列 $\{a_n\}$ 是柯西序列，当且仅当：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N : |a_m - a_n| < \varepsilon$$

定理2.1（柯西收敛准则）：实数列收敛当且仅当它是柯西序列。

2.4 单调序列

定义2.7（单调性）：

- **单调递增**：$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$
- **严格单调递增**：$\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$
- **单调递减**：$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$
- **严格单调递减**：$\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$

定理2.2（单调有界定理）：单调有界数列必收敛。

2.5 上极限与下极限

定义2.8（上极限与下极限）：设 $\{a_n\}$ 为有界数列。

- **上极限**：$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k$
- **下极限**：$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k$

定理2.3：数列收敛当且仅当其上极限等于下极限。

第三章：函数概念

3.1 函数的定义

定义3.1（函数）：设 $D, E \subset \mathbb{R}$ 为非空集合。从 D 到 E 的函数 f 是一个对应规则，使得对每个 $x \in D$，都有唯一的 $y \in E$ 与之对应，记为 $y = f(x)$。

- **定义域**：$\mathrm{dom}(f) = D$
- **值域**：$\mathrm{range}(f) = \{f(x) : x \in D\}$
- **图像**：$\mathrm{graph}(f) = \{(x, f(x)) : x \in D\}$

3.2 函数的性质

定义3.2（单调性）：设 $f : D \to \mathbb{R}$，$I \subset D$ 为区间。

- **单调递增**：$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- **严格单调递增**：$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- **单调递减**：$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- **严格单调递减**：$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

定义3.3（有界性）：设 $f : D \to \mathbb{R}$。

- **有上界**：$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D : f(x) \leq M$
- **有下界**：$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in D : f(x) \geq m$
- **有界**：$\exists M > 0, \forall x \in D : |f(x)| \leq M$

定义3.4（周期性）：函数 f 是周期函数，若存在 $T > 0$ 使得：

$$\forall x \in \mathrm{dom}(f) : f(x + T) = f(x)$$

最小的这样的 T 称为基本周期。

定义3.5（奇偶性）：设 f 的定义域关于原点对称。

- **偶函数**：$\forall x \in \mathrm{dom}(f) : f(-x) = f(x)$
- **奇函数**：$\forall x \in \mathrm{dom}(f) : f(-x) = -f(x)$

第四章：函数极限理论

4.1 函数极限的定义

定义4.1（函数在点处的极限）：设 f 在点 x_0 的某去心邻域内有定义。称 f 在 x_0 处的极限为 L，记为 $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$，当且仅当：

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in \mathrm{dom}(f) : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

定义4.2（单侧极限）：

- **右极限**：$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x : x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$
- **左极限**：$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x : x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

定理4.1：$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ 当且仅当 $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$。

4.2 无穷远处的极限

定义4.3（无穷远处的极限）：

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists X > 0, \forall x > X : |f(x) - L| < \varepsilon$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists X > 0, \forall x < -X : |f(x) - L| < \varepsilon$
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$

4.3 无穷极限

定义4.4（无穷极限）：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists\delta > 0, \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

类似可定义 $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$。

4.4 函数极限与数列极限的关系

定理4.2（海涅定理）：$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ 当且仅当对任意满足 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ 且 $x_n \neq x_0$ 的数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$。

第五章：连续性理论

5.1 连续性的定义

定义5.1（点处连续）：设 f 在点 x_0 及其某邻域内有定义。称 f 在 x_0 处连续，当且仅当：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

等价地：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \operatorname{dom}(f) : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

定义5.2（单侧连续）：

- **右连续**：$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$
- **左连续**：$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

定义5.3（区间上连续）：

- f 在开区间 (a, b) 上连续：f 在 (a, b) 内每点都连续
- f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续：f 在 (a, b) 内连续，在 a 右连续，在 b 左连续

5.2 连续函数类

定义5.4（连续函数类）：

$$C(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ 在 } I \text{ 上连续}\}$$

其中 I 是区间。

5.3 一致连续性

定义5.5（一致连续）：函数 f 在集合 D 上一致连续，当且仅当：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in D : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

定理5.1（Cantor定理）：闭区间上的连续函数必一致连续。

5.4 连续函数的重要性质

定理5.2（有界性定理）：若 f 在紧集上连续，则 f 有界。

定理5.3（最值定理）：若 f 在紧集上连续，则 f 能取到最大值和最小值。

定理5.4（中间值定理）：设 f 在 $[a, b]$ 上连续，若 $f(a) \neq f(b)$，则对任意介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的值 μ，存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c) = \mu$。

定理5.5（零点定理）：设 f 在 $[a, b]$ 上连续，若 $f(a) \cdot f(b) < 0$，则存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c) = 0$。

第六章：导数理论

6.1 导数的定义

定义6.1（导数）：设函数 f 在点 x_0 的某邻域内有定义。若极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在，则称 f 在点 x_0 可导，该极限值称为 f 在 x_0 的导数，记为 $f'(x_0)$。

等价定义：

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

定义6.2（单侧导数）：

- **右导数**：$f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
- **左导数**：$f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

定理6.1：f 在 x_0 可导当且仅当左导数和右导数都存在且相等。

6.2 高阶导数

定义6.3（高阶导数）：设 f 在区间 I 上可导。若 f' 在某点 $x_0\in I$ 可导，则称 f 在 x_0 二阶可导，$(f')'(x_0)$ 称为 f 在 x_0 的二阶导数，记为 $f''(x_0)$。

一般地，f 的 n 阶导数定义为：

$$f^{(n)}(x)=\frac{d}{dx}[f^{(n-1)}(x)]$$

6.3 可微函数类

定义6.4（C^n 函数类）：

- $C^0(I)=C(I)$：连续函数类
- $C^1(I)=\{f:I\to\mathbb{R}\mid f'\text{ 存在且连续}\}$
- $C^n(I)=\{f:I\to\mathbb{R}\mid f^{(k)}\text{ 存在且连续，}k=0,1,\ldots,n\}$
- $C^\infty(I)=\bigcap_{n=0}^{\infty}C^n(I)$：无穷次可微函数类

6.4 可导性与连续性

定理6.2（可导必连续）：若 f 在 x_0 可导，则 f 在 x_0 连续。

注意：连续不一定可导。

第七章：微分中值定理

7.1 费马引理

引理7.1（费马引理）：设 f 在 (a,b) 内有定义，在 $x_0 \in (a,b)$ 可导。若 x_0 是 f 的局部极值点，则 $f'(x_0)=0$。

7.2 罗尔定理

定理7.1（罗尔定理）：设函数 f 满足：

1. f 在 $[a,b]$ 上连续
2. f 在 (a,b) 内可导
3. $f(a)=f(b)$

则存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$。

7.3 拉格朗日中值定理

定理7.2（拉格朗日中值定理）：设函数 f 满足：

1. f 在 $[a,b]$ 上连续
2. f 在 (a,b) 内可导

则存在 $\xi \in (a,b)$ 使得：

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

7.4 柯西中值定理

定理7.3（柯西中值定理）：设函数 f,g 满足：

1. f,g 在 $[a,b]$ 上连续
2. f,g 在 (a,b) 内可导
3. $\forall x \in (a,b): g'(x) \neq 0$

则存在 $\xi \in (a,b)$ 使得：

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

7.5 洛必达法则

定理7.4（洛必达法则）：设函数 f, g 在点 a 的某去心邻域内可导，$g'(x) \neq 0$，且满足：

1. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ 或 $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$
2. $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或为无穷）

则：

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

第八章：泰勒定理与函数逼近

8.1 泰勒多项式

定义8.1（泰勒多项式）：设 f 在 x_0 处有 n 阶导数，则 f 在 x_0 处的 n 次泰勒多项式为：

$$T_n(x; x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

特别地，当 $x_0 = 0$ 时称为麦克劳林多项式。

8.2 泰勒定理

定理8.1（泰勒定理）：设 f 在 $[a, b]$ 上有 n 阶连续导数，在 (a, b) 内有 $n+1$ 阶导数，$x_0 \in [a, b]$，则对任意 $x \in [a, b]$，存在 ξ 介于 x 和 x_0 之间，使得：

$$f(x) = T_n(x; x_0) + R_n(x)$$

其中余项 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$（拉格朗日余项）。

定理8.2（佩亚诺余项）：若 f 在 x_0 处有 n 阶导数，则：

$$f(x) = T_n(x; x_0) + o((x - x_0)^n)$$

8.3 泰勒级数

定义8.2（泰勒级数）：若 f 在 x_0 处有任意阶导数，则其泰勒级数为：

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

定义8.3（解析函数）：若函数 f 在点 x_0 的某邻域内等于其泰勒级数，则称 f 在 x_0 解析。

第九章：误差理论

9.1 误差的基本概念

定义9.1（绝对误差与相对误差）：设 x^* 为精确值 x 的近似值。

- **绝对误差**：$e = x^* - x$
- **绝对误差的绝对值**：$|e| = |x^* - x|$
- **相对误差**：$e_r = \frac{x^*-x}{x}$ （当 $x \neq 0$ 时）
- **相对误差的绝对值**：$|e_r| = \left|\frac{x^*-x}{x}\right|$

定义9.2（误差限）：

- **绝对误差限**：若 $|x^* - x| \leq \varepsilon$，则称 ε 为绝对误差限
- **相对误差限**：若 $\left|\frac{x^*-x}{x}\right| \leq \delta$，则称 δ 为相对误差限

9.2 有效数字

定义9.3（有效数字）：若近似值 x^* 的绝对误差限不超过其第 n 位数字所在位的半个单位，则称 x^* 有 n 位有效数字。

具体地，若 $x^* = \pm 0.a_1 a_2 \cdots a_n \times 10^m$（其中 $a_1 \neq 0$），且 $|x^* - x| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$则称 x^* 有 n 位有效数字。

9.3 误差传播

定义9.4（误差传播）：考虑函数 $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，其中各变量 x_i 都有误差 Δx_i。

线性化误差传播公式：$\Delta y \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i$

相对误差传播公式：$\frac{\Delta y}{y} \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln|f|}{\partial x_i} \frac{\Delta x_i}{x_i}$

9.4 条件数

定义9.5（问题的条件数）：对于问题 $y = f(x)$，在点 x 处的（相对）条件数定义为：$\kappa(x) = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|$

定义9.6（矩阵的条件数）：对于可逆矩阵 A，其条件数定义为：$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

其中 $\|\cdot\|$ 是矩阵范数。

定义9.7（病态与良态）：

- 若条件数很大，称问题为**病态**的
- 若条件数适中，称问题为**良态**的

第十章：收敛阶理论

10.1 序列的收敛阶

定义10.1（收敛阶）：设数列 $\{x_n\}$ 收敛到 x^*，$x_n \neq x^*$。若存在常数 $C > 0$ 和 $p \geq 1$ 使得：$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|^p} = C$

则称数列以 p 阶收敛到 x^*。特别地：

- $p = 1, C < 1$：**线性收敛**
- $p = 1, C = 0$：**超线性收敛**
- $p = 2$：**二次收敛**
- $p > 2$：**超二次收敛**

定义10.2（收敛速度）：当 $p = 1$ 时，常数 C 称为收敛速度或收敛因子。

10.2 算法的收敛阶

定义10.3（算法收敛阶）：对于产生序列 $\{x_n\}$ 收敛到 x^* 的算法，若该序列以 p 阶收敛，则称算法具有 p 阶收敛。

10.3 渐近表示

定义10.4（大O记号）：设 f, g 是定义在某集合上的函数。$f(x) = O(g(x)) \Leftrightarrow \exists C > 0, \exists x_0, \forall x > x_0 : |f(x)| \leq C|g(x)|$

定义10.5（小o记号）：$f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

定义10.6（同阶）：$f(x) = \Theta(g(x)) \Leftrightarrow \exists C_1, C_2 > 0, \exists x_0, \forall x > x_0 : C_1|g(x)| \leq |f(x)| \leq C_2|g(x)|$

第十一章：数值稳定性理论

11.1 数值稳定性的定义

定义11.1（前向误差）：设算法求解问题 $f(x) = y$，算法输出为 $\tilde{y}$，则前向误差为：$E_f = \tilde{y} - y$

定义11.2（后向误差）：若算法输出 $\tilde{y}$ 是问题 $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$ 的精确解，则后向误差为：$E_b = \tilde{x} - x$

定义11.3（数值稳定性）：一个算法是数值稳定的，如果对于任何输入，都存在接近原输入的扰动输入，使得算法输出是该扰动问题的精确解。

11.2 算法稳定性的分类

定义11.4（前向稳定）：算法是前向稳定的，如果对所有输入 x：$\|\tilde{y} - y\| \leq C\varepsilon\|y\|$其中 ε 是机器精度，C 是适度的常数。

定义11.5（后向稳定）：算法是后向稳定的，如果对所有输入 x，都存在 Δx 使得：

1. $\|\Delta x\| \leq C\varepsilon\|x\|$
2. $\tilde{y} = f(x + \Delta x)$

其中 C 是适度的常数。

第十二章：插值理论基础

12.1 插值问题

定义12.1（插值问题）：给定 $n+1$ 个不同的节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 和对应的函数值 $y_0, y_1, \ldots, y_n$，求函数 $P(x)$ 使得：$P(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n$

定理12.1（多项式插值的存在唯一性）：$n+1$ 个不同节点确定唯一的 n 次多项式。

12.2 插值误差

定义12.2（插值误差）：设 f 为被插值函数，P_n 为插值多项式，则插值误差为：$E_n(x) = f(x) - P_n(x)$

定理12.2（插值误差公式）：设 $f \in C^{n+1}[a,b]$，插值节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$，则对任意 $x \in [a,b]$，存在 $\xi \in (a,b)$ 使得：$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$其中 $\omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$ 。

12.3 逼近度量

定义12.3（均匀逼近）：函数 g 在区间 $[a,b]$ 上均匀逼近函数 f，若：$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g_n(x)| = 0$

定义12.4（最佳逼近）：在给定函数类 $\mathcal{F}$ 中，函数 $g^* \in \mathcal{F}$ 是 f 的最佳逼近，若：$\|f - g^*\| = \inf_{g\in\mathcal{F}} \|f - g\|$

第十三章：数值积分理论基础

13.1 数值积分的基本概念

定义13.1（求积公式）：数值积分的一般形式为：$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$其中 $w(x)$ 是权函数，A_i 是求积系数，x_i 是求积节点。

定义13.2（求积公式的余项）：$R[f] = \int_a^b f(x)w(x)dx - \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$

13.2 代数精度

定义13.3（代数精度）：若求积公式对所有次数不超过 m 的多项式都精确成立，但对某个 $m+1$ 次多项式不精确成立，则称该求积公式具有 m 次代数精度。

13.3 数值积分的稳定性

定义13.4（数值积分的稳定性）：求积公式是稳定的，如果存在常数 C（与 n 无关）使得：$\sum_{i=0}^{n} |A_i| \leq C$

第十四章：迭代法的一般理论

14.1 不动点与压缩映射

定义14.1（不动点）：设 $T: D \to D$ 是映射，若 $x^* \in D$ 满足 $T(x^*) = x^*$，则称 x^* 为 T 的不动点。

定义14.2（压缩映射）：设 (X, d) 是度量空间，映射 $T: X \to X$ 称为压缩映射，若存在常数 $0 < L < 1$ 使得：$d(T(x), T(y)) \leq L \cdot d(x, y), \quad \forall x, y \in X$

定理14.1（Banach不动点定理）：完备度量空间中的压缩映射有唯一不动点，且对任意初值的迭代序列都收敛到该不动点。

14.2 迭代法的收敛性

定义14.3（一般迭代法）：$x_{n+1} = T(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

定理14.2（局部收敛定理）：设 T 在不动点 x^* 的邻域内可微，且 $|T'(x^*)| < 1$，则存在 x^* 的邻域，使得该邻域内任意初值的迭代都收敛到 x^*。

第十五章：范数理论

15.1 向量范数

定义15.1（向量范数）：$\mathbb{R}^n$ 上的范数是函数 $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$，满足：

1. **正定性**：$\|x\| \geq 0$，且 $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. **齐次性**：$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$，$\forall \alpha \in \mathbb{R}$
3. **三角不等式**：$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

常用向量范数：

- **1-范数**：$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- **2-范数**：$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$
- **∞-范数**：$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

15.2 矩阵范数

定义15.2（矩阵范数）：$\mathbb{R}^{n \times n}$ 上的范数是函数 $\|\cdot\|: \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}_+$，满足范数的三个基本性质，以及：4. **相容性**：$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

定义15.3（算子范数）：由向量范数诱导的矩阵范数：$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$

常用矩阵范数：

- **1-范数**：$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$（列和的最大值）
- **∞-范数**：$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$（行和的最大值）
- **2-范数**：$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)}$（最大奇异值）

15.3 谱半径

定义15.4（谱半径）：矩阵 A 的谱半径定义为：$\rho(A) = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|$其中 λ_i 是 A 的特征值。

定理15.1：对任意矩阵范数，有 $\rho(A) \leq \|A\|$。

定理15.2：$\rho(A) = \inf\{\|A\| : \|\cdot\| \text{ 是矩阵范数}\}$。

第十六章：逼近论基础

16.1 最佳逼近

定义16.1（最佳逼近元）：设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间，$f \in X$，$Y \subset X$ 是子空间。若 $g^* \in Y$ 满足：$\|f - g^*\| = \inf_{g\in Y} \|f - g\| = d(f, Y)$则称 g^* 为 f 在 Y 中的最佳逼近元。

定义16.2（逼近误差）：$d(f, Y) = \inf_{g\in Y} \|f - g\|$ 称为 f 到子空间 Y 的距离或逼近误差。

16.2 线性逼近

定义16.3（线性泛函）：设 Y 是 n 维子空间，$\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ 是 Y 的基。线性逼近的形式为：$L_n(f) = \sum_{i=1}^n c_i g_i$

定义16.4（线性算子的范数）：线性算子 $L : X \to Y$ 的范数定义为：$\|L\| = \sup_{\|f\|_X=1} \|L(f)\|_Y$

16.3 Weierstrass逼近定理

定理16.1（Weierstrass第一定理）：闭区间上的连续函数可以用多项式一致逼近。

定理16.2（Weierstrass第二定理）：$[0, 2\pi]$ 上的连续周期函数可以用三角多项式一致逼近。

16.4 最佳逼近的特征

定理16.3（最佳逼近的唯一性）：在严格凸的赋范空间中，最佳逼近元是唯一的。

定理16.4（Kolmogorov定理）：设 X 是赋范空间，Y 是 X 的有限维子空间，$f \in X$，$g^* \in Y$。则 g^* 是 f 的最佳逼近当且仅当不存在 $h \in Y$ 使得 $\|f - g^* + th\| < \|f - g^*\|$ 对所有充分小的 $t > 0$ 成立。

第十七章：泛函分析基础

17.1 赋范空间

定义17.1（赋范空间）：设 X 是线性空间，$\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}_+$ 是范数，则称 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范空间。

定义17.2（Banach空间）：完备的赋范空间称为Banach空间。

17.2 有界线性算子

定义17.3（有界线性算子）：设 X, Y 是赋范空间，线性算子 $T: X \to Y$ 称为有界的，若存在常数 $M > 0$ 使得：$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X, \quad \forall x \in X$

定理17.1：线性算子 T 有界当且仅当 T 连续。

定义17.4（算子范数）：有界线性算子 $T: X \to Y$ 的范数定义为：$\|T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$

17.3 对偶空间

定义17.5（对偶空间）：赋范空间 X 的对偶空间 X^* 是所有有界线性泛函 $f: X \to \mathbb{R}$ 构成的空间。

定理17.2（Riesz表示定理的推广）：在Hilbert空间中，每个有界线性泛函都可以表示为内积的形式。

17.4 紧算子

定义17.6（紧算子）：设 X, Y 是赋范空间，线性算子 $T: X \to Y$ 称为紧的，若 T 将 X 中的有界集映射为 Y 中的相对紧集。

定理17.3：紧算子必然有界。

17.5 弱收敛

定义17.7（弱收敛）：设 X 是赋范空间，序列 $\{x_n\} \subset X$ 弱收敛到 $x \in X$，记为 $x_n \rightharpoonup x$，若：$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x), \quad \forall f \in X^*$

定理17.4：强收敛必然蕴含弱收敛，但反之不然。

第十八章：度量空间理论

18.1 度量空间的定义

定义18.1（度量）：设 X 是非空集合，函数 $d: X \times X \to \mathbb{R}_+$ 称为度量，若满足：

1. **正定性**：$d(x,y) \geq 0$，且 $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. **对称性**：$d(x,y) = d(y,x)$
3. **三角不等式**：$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

称 (X, d) 为度量空间。

18.2 度量空间中的基本概念

定义18.2（开球与闭球）：在度量空间 (X,d) 中：

- **开球**：$B(x,r)=\{y\in X:d(x,y)<r\}$
- **闭球**：$\overline{B}(x,r)=\{y\in X:d(x,y)\leq r\}$

定义18.3（完备性）：度量空间 (X,d) 是完备的，若其中每个Cauchy序列都收敛。

定义18.4（紧性）：度量空间中的集合 K 是紧的，若其每个开覆盖都有有限子覆盖。

18.3 度量空间中的连续性

定义18.5（连续映射）：设 (X,d_X)，(Y,d_Y) 是度量空间，映射 $f:X\to Y$ 在点 $x_0\in X$ 连续，若：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in X:d_X(x,x_0)<\delta\Rightarrow d_Y(f(x),f(x_0))<\varepsilon$

定理18.1（一致连续性）：紧度量空间上的连续函数必一致连续。

第十九章：拓扑空间基础

19.1 拓扑的定义

定义19.1（拓扑）：设 X 是非空集合，$\mathcal{T}\subseteq 2^X$ 称为 X 上的拓扑，若：

1. $\emptyset,X\in\mathcal{T}$
2. $\mathcal{T}$ 中任意子族的并集属于 $\mathcal{T}$
3. $\mathcal{T}$ 中有限个元素的交集属于 $\mathcal{T}$

称 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间，$\mathcal{T}$ 中的元素称为开集。

19.2 拓扑空间中的基本概念

定义19.2（闭集）：开集的补集称为闭集。

定义19.3（邻域）：点 x 的邻域是包含 x 的某个开集的子集。

定义19.4（聚点与闭包）：

- 点 x 是集合 A 的聚点，若 x 的每个邻域都与 $A\setminus\{x\}$ 有交集
- 集合 A 的闭包 $\overline{A}$ 是 A 与其所有聚点的并集

19.3 拓扑连续性

定义19.5（拓扑连续）：设 $(X,\mathcal{T}_X)$，$(Y,\mathcal{T}_Y)$ 是拓扑空间，映射 $f:X\to Y$ 连续，若对 Y 中每个开集 V，$f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集。

第二十章：概念体系的完整性总结

20.1 理论层次结构

我们建立的概念体系具有清晰的层次结构：

第一层：公理基础

- 实数公理 → 域结构、序结构、完备性
- 确界理论 → 戴德金分割 → 实数构造

第二层：分析基础

- 序列理论 → 收敛性、Cauchy序列、单调性
- 函数理论 → 极限、连续性、可微性
- 中值定理 → 泰勒定理 → 函数逼近

第三层：空间理论

- 线性空间 → 基、维数、线性映射
- 内积空间 → 正交性、投影、Hilbert空间
- 赋范空间 → Banach空间、有界算子

第四层：拓扑与度量

- 度量空间 → 完备性、紧性、连续性
- 拓扑空间 → 开集、闭集、拓扑连续性
- 范数理论 → 向量范数、矩阵范数、算子范数

第五层：误差与收敛

- 误差理论 → 绝对误差、相对误差、误差传播
- 条件数理论 → 数值稳定性、病态问题
- 收敛阶理论 → 线性收敛、超线性收敛、二次收敛

第六层：逼近与迭代

- 逼近论 → 最佳逼近、Weierstrass定理
- 迭代法理论 → 不动点、压缩映射、Banach定理
- 算子理论 → 紧算子、对偶空间、弱收敛

20.2 数值分析的理论基础

这个完整的概念体系为数值分析提供了坚实的理论基础：

插值理论的基础：

- 内积空间中的正交投影 → 最佳逼近插值
- 赋范空间中的距离概念 → 插值误差分析

- 线性空间理论 → 插值基函数的线性组合

数值积分的基础：

- 泛函分析中的线性泛函 → 积分的线性性质
- 逼近论中的最佳逼近 → 求积公式的构造
- Hilbert空间理论 → 正交多项式与Gauss积分

数值线性代数的基础：

- 矩阵范数理论 → 误差分析与稳定性
- 谱半径理论 → 迭代法收敛性
- 条件数理论 → 线性系统的敏感性分析

非线性方程求解的基础：

- 不动点理论 → 迭代法设计
- 压缩映射定理 → 收敛性保证
- 微分中值定理 → Newton法的收敛性分析

20.3 概念间的逻辑关系

各概念之间存在严密的逻辑关系：

1. **实数完备性** 是所有分析概念的基础
2. **内积空间结构** 为最佳逼近提供几何直观
3. **范数理论** 统一了误差度量和收敛性分析
4. **泛函分析** 为算子理论和稳定性分析提供工具
5. **逼近论** 连接理论分析与数值实现

这个概念体系的完整性保证了数值分析方法在理论上的严谨性，为后续的算法设计、误差控制和收敛性分析提供了完备的数学工具。*infty* = *max*{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$（行和的最大值）

- **2-范数**：$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$（最大奇异值）

15.3 谱半径

定义15.4（谱半径）：矩阵 A 的谱半径定义为： $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$其中 λ_i 是 A 的特征值。

定理15.1：对任意矩阵范数，有 $\rho(A) \leq \|A\|$。

定理15.2：$\rho(A) = \inf\{\|A\| : \|\cdot\| \text{ 是矩阵范数}\}$。

第十六章：逼近论基础

16.1 最佳逼近

定义16.1（最佳逼近元）：设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间，$f \in X$，$Y \subset X$ 是子空间。若 $g^* \in Y$ 满足：$\|f - g^*\| = \inf_{g \in Y} \|f - g\| = d(f, Y)$则称 g^* 为 f 在 Y 中的最佳逼近元。

定义16.2（逼近误差）：$d(f, Y) = \inf_{g \in Y} \|f - g\|$ 称为 f 到子空间 Y 的距离或逼近误差。

16.2 线性逼近

定义16.3（线性泛函）：设 Y 是 n 维子空间，$\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ 是 Y 的基。线性逼近的形式为：$L_n(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i g_i$

定义16.4（线性算子的范数）：线性算子 $L : X \to Y$ 的范数定义为：$\|L\| = \sup_{\|f\|_X = 1} \|L(f)\|_Y$

16.3 Weierstrass逼近定理

定理16.1（Weierstrass第一定理）：闭区间上的连续函数可以用多项式一致逼近。

定理16.2（Weierstrass第二定理）：$[0, 2\pi]$ 上的连续周期函数可以用三角多项式一致逼近。

结语：概念体系的完整性

通过以上十六章的严格构建，我们建立了从实数公理到数值分析的完整概念体系：

理论基础层

- **实数公理 → 确界理论 → 完备性**
- **戴德金分割 → 连续性概念 → 实数构造**

分析理论层

- **序列理论 → 函数概念 → 极限理论**
- **连续性 → 导数理论 → 中值定理**
- **泰勒定理 → 函数逼近 → 级数理论**

误差理论层

- **误差定义 → 误差传播 → 条件数理论**
- **收敛阶 → 稳定性 → 收敛性分析**

数值方法层

- **插值理论 → 数值积分 → 迭代法理论**
- **范数理论 → 逼近论 → 算法分析**

这个概念体系为后续的具体数值方法研究提供了坚实的理论基础，每个概念都有严格的数学定义，为算法设计、误差分析和收敛性研究奠定了理论框架。